システム創成学基礎
ー 動力学系モデルの定性的挙動 ー

古 田 一 雄

自由システムの平衡状態

◆ 平衡方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\mathbf{x},\mathbf{u}) \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0 \\ f_2(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

◆ 平衡状態
- 時間が経過してもそのまま維持されるような状態

◆ 平衡点
- 状態空間において平衡状態に対応する点

平衡状態の例1
ー 化学平衡（1） ー

- 正逆両方向に進む化学反応

  $N_2 + 3H_2 \leftrightarrows 2NH_3$

- 正反応と逆反応の速度

  $$v_1 = k_1 p_{\mathrm{N_2}} p_{\mathrm{H_2}}^3, \quad v_2 = k_2 p_{\mathrm{NH_3}}^2$$

- 両反応速度が等しいとき

  $$k_1 p_{\mathrm{N_2}} p_{\mathrm{H_2}}^3 = k_2 p_{\mathrm{NH_3}}^2$$

  $$\frac{p_{\mathrm{NH_3}}^2}{p_{\mathrm{N_2}} p_{\mathrm{H_2}}^3} = \frac{k_1}{k_2} = K \quad \cdots \text{平衡定数}$$

平衡状態の例1
ー 化学平衡（2） ー

- 一般的な場合

  αA + βB +é ⇆ μX + νY +é

- 正反応と逆反応の速度

  $$v_1 = k_1[\mathrm{A}]^\alpha[\mathrm{B}]^\beta \cdots, \quad v_2 = k_2[\mathrm{X}]^\mu[\mathrm{Y}]^\nu \cdots$$

- 質量作用の法則

  $$k_1[\mathrm{A}]^\alpha[\mathrm{B}]^\beta \cdots = k_2[\mathrm{X}]^\mu[\mathrm{Y}]^\nu \cdots$$

  $$\frac{[\mathrm{X}]^\mu[\mathrm{Y}]^\nu \cdots}{[\mathrm{A}]^\alpha[\mathrm{B}]^\beta \cdots} = \frac{k_1}{k_2} = K \quad \cdots \text{平衡定数}$$

平衡状態の例2
ー 放射平衡 ー

◆ 放射性核種の崩壊系列

X → Y → Z

◆ 原子数の時間変化 $(N_1(0)=N_0,\ N_2(0)=0)$

$$\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1 N_1 \qquad\qquad N_1=N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dN_2}{dt}=\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2 \qquad\qquad N_2=\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t})$$

◆ $\lambda_1 << \lambda_2$のとき

$$N_2 \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2}N_0 e^{-\lambda_1 t}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}N_1 \qquad \frac{dN_2}{dt}=\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2 \approx 0$$

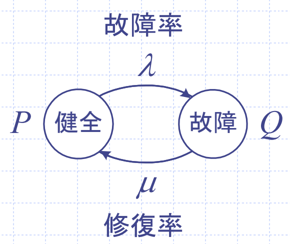
平衡状態の例3
ー 常用設備の信頼性 ー

◆ エレベータなどの常用設備

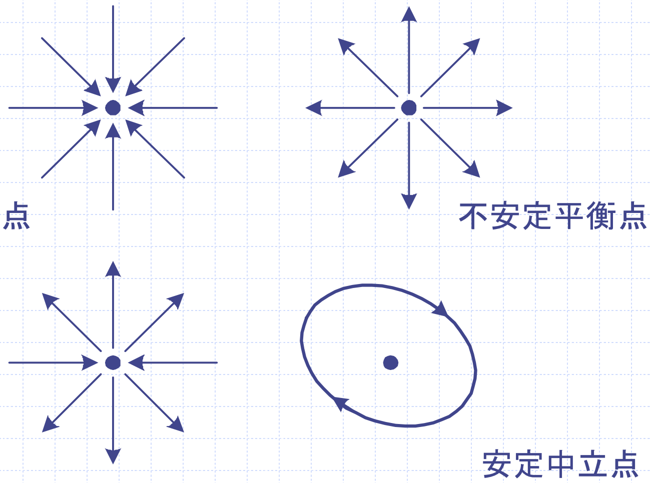
$$\dot{P}=\mu Q-\lambda P$$
$$\dot{Q}=\lambda P-\mu Q$$

◆ 使用開始して十分経過すると平衡状態に収束

$$\mu Q-\lambda P=0$$
$$P+Q=1$$
$$(P^*,Q^*)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu},\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$



平衡点近傍の挙動



アイソクラインとシステム挙動

- アイソクライン

超平面

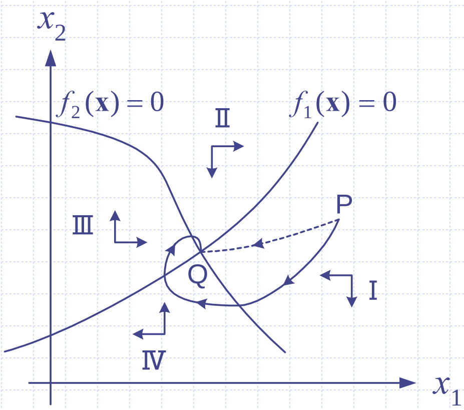
$$f_i(\mathbf{x}) = 0$$

片側で

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) > 0$$

反対側で

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) < 0$$



状態空間はアイソクラインで有限個の部分空間に分割

平衡点はすべてのアイソクラインの交点

位相空間解析の例1
ー Lotka-Volterraモデル（1） ー

◆ 一般的なLotka-Volterraモデル

- 種間関係を考慮した生物個体数の変動

$$\frac{dx_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \lambda_1 x_1 - \mu_1 x_2)x_1 \qquad \lambda_i : \text{種内競争係数}$$

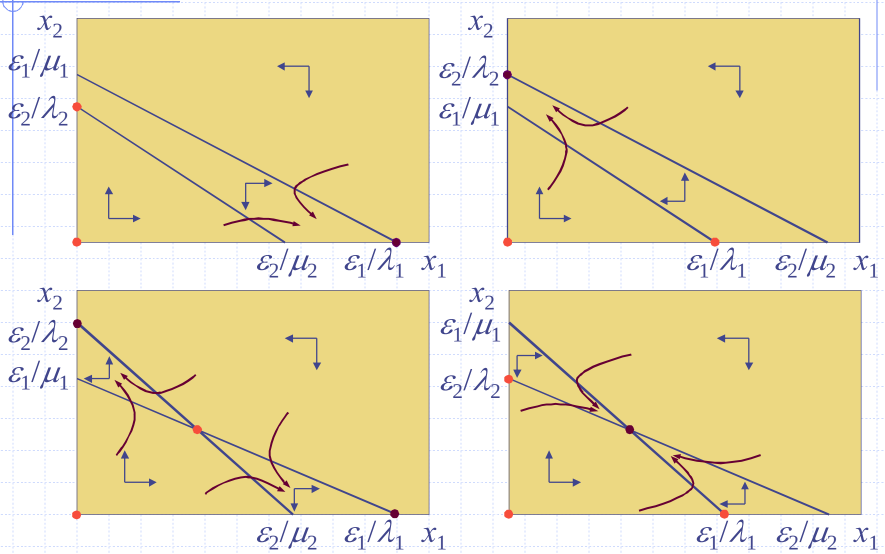
$$\frac{dx_2}{dt} = (\varepsilon_2 - \mu_2 x_1 - \lambda_2 x_2)x_2 \qquad \mu_i : \text{種間競争係数}$$

- アイソクライン

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 0 \ \text{or} \ l_1 : \varepsilon_1 - \lambda_1 x_1 - \mu_1 x_2 = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 0 \ \text{or} \ l_2 : \varepsilon_2 - \mu_2 x_1 - \lambda_2 x_2 = 0$$

位相空間解析の例1
ー Lotka-Volterraモデル（2） ー



位相空間解析の例2

ー 被食者-捕食者だけのL-Vモデル（1）ー

◆ 被食者-捕食者だけのLotka-Volterraモデル

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1 x_1 - \mu_1 x_1 x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\varepsilon_2 x_2 + \mu_2 x_1 x_2$$

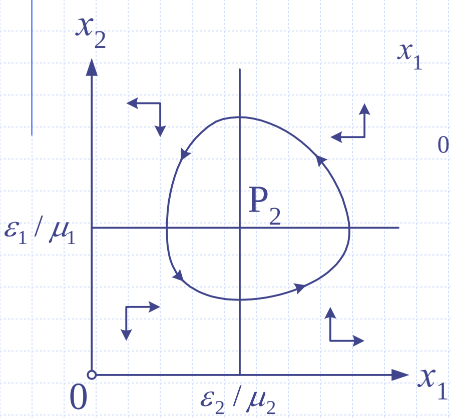
- アイソクライン

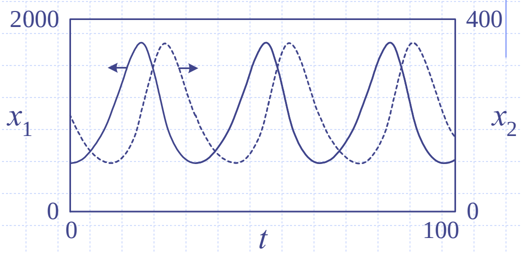
$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ or } x_2 = \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \qquad \mathrm{P}_1 : (0, 0)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ or } x_1 = \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \qquad \mathrm{P}_2 : \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}, \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}\right)$$

位相空間解析の例2

ー 被食者-捕食者だけのL-Vモデル（2）ー





$(\varepsilon_1 = 0.2, \varepsilon_2 = 0.2,$
$\mu_1 = 0.001, \mu_2 = 0.0002)$